Sesión de Preparación de Olimpiada Matemática

18 de Febrero de 2022. Fernando Mayoral `mayoral@us.es`

Desigualdades (polinomios, funciones, gráficas).

Algunas desigualdades básicas.

1) En lo referente a relación de las desigualdades con las operaciones suma/resta y producto/cociente, las propiedades básicas son las siguientes. Sean x, y, a números reales,

- $x \leq y \Longleftrightarrow a + x \leq a + y$.
- Si $a > 0$, $x \leq y \Longleftrightarrow ax \leq ay$.
- Si $a < 0$, $x \leq y \Longleftrightarrow ax \geq ay$.

2) En lo referente a potencias

- Si $x, y > 0$, la desigualdad $x < y$ es equivalente a $x^n < y^n$ para algún valor de n (número natural o incluso fracción positiva.
- Si $a > 1$, entonces $a < a^2 < a^3 < \cdots$
- Si $0 < a < 1$, entonces $a > a^2 > a^3 > \cdots$

3) $x^2 \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. La igualdad sólo se cumple para $x = 0$.

4) **Desigualdad triangular.** Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

La igualdad se cumple si, y sólo si, $xy \geq 0$.

5) **Desigualdades entre las Medias:** Sean $a, b > 0$,

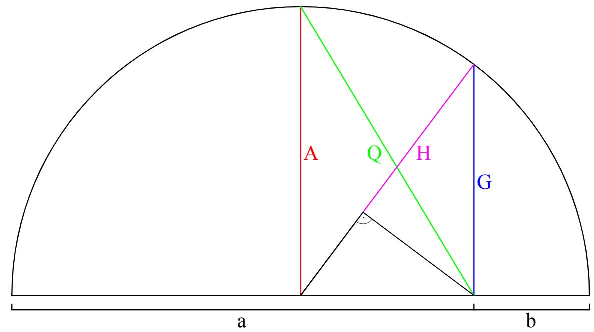
- (A) media aritmética $A(a, b) = \dfrac{a + b}{2}$.
- (G) media geométrica $G(a, b) = \sqrt{ab}$.
- (H) media armónica $H(a, b) = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \dfrac{1}{A\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)}$.
- (Q) media cuadrática $Q(a, b) = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.

Entonces se verifica que

$$\boxed{\min\{a, b\} \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq \max\{a, b\}}.$$

Además, se verifica alguna de las igualdades (si, y sólo si, se verifican todos y) si, y sólo si, $a = b$.

Las desigualdades entre las medias tienen la visualización adjunta. Dicha visualización muestra también cuánto se parecen y cuánto se diferencian dichas medias en función de lo parecidos o diferentes que sean a y b.



Todas las desigualdades involucradas en $H \leq G \leq A \leq Q$ son equivalentes entre si y son equvalentes a la desigualdad $(a-b)^2 \geq 0 \;\equiv\; 2ab \leq a^2+b^2$ (y la igualdad se cumple sólo, y exclusivamente, para $a=b$). También puede considerarse una interpretación geométrica en términos de áreas y perímetros de rectángulos.

- puesto que ab es el área de un rectágulo de lados a y b (perímetro $= 2(a+b)$) y $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ es el área del cuadrado que tiene dicho perímetro (lado $= \frac{a+b}{2}$), la desigualdad

$$H \leq A \;\equiv\; \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2} \;\equiv\; ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

  nos dice que el área del rectágulo es menor o igual que la del cuadrado del mismo perímetro. Y la igualdad sólo se obtiene en el caso del cuadrado $a=b$. Es decir, *de entre todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene mayor área es el cuadrado.*

- Puesto que $2(a+b)$ es el perímetro de un rectángulo de lados a y b (área $= ab$) y el perímetro del cuadrado que tiene área ab (lado $= \sqrt{ab}$) es $4\sqrt{ab}$ la desigualdad

$$G \leq A \;\equiv\; \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \;\equiv\; 4\sqrt{ab} \leq 2(a+b),$$

  nos dice que el perímetro del rectángulo es menor o igual que el del cuadrado del mismo área. Y la igualdad sólo se obtiene en el caso del cuadrado $a=b$. Es decir, *de entre todos los rectángulos con un área dada, el que tiene menor perímetro es el cuadrado.*

6) Desigualdad del Reordenamiento. Sean (a,b) y (x,y) dos parejas de números reales.

Si $a \leq b$ y $x \leq y$, entonces $\boxed{ay+bx \leq ax+by.}$

7) Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sean (a,b) y (x,y) dos parejas de números reales. Entonces

$$|ax+by| \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2} \;\equiv\; (ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2).$$

8) Los lados de un triángulo. Para que tres números $a,b,c>0$ puedan ser los lados de un triángulo,

- cada uno de ellos tiene que ser menor que la suma de los otros dos.

- De forma equivalente, el mayor tiene que ser menor que la suma de los otros.

  Si $0 < a, b \leq c$, entonces $c \leq a + b$.

* Si $c = a + b$ tendremos un segmento como *caso límite*.

*) **Versiones para $n-$plas**: las desigualdades entre las medias, la desigualdad del reordenamiento y la desigualdad de Cauchy-Schwarz tienen versiones para $n - plas$.

Para ir entrando en calor:

Ejercicio 1. *(OME-FL)* Determinar los números reales $x > 1$ para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \quad x^4 - 1.$$

....

Ejercicio 2.

a) Demuestra que $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ para cualquier $x > 0$.

b) Dibuja las gráficas $y = x$ e $y = \dfrac{1}{x}$ e interpreta geométricamente el apartado anterior.

....

Para interpretar geométricamente:

Ejercicio 3. *(OME-FL-2006)* Se considera la inecuación $|x-1| < ax$ donde a es un parámetro real.

a) Discutir la inecuación según los valores de a.

b) Caracterizar los valores de a para los cuales la inecuación tiene exactamente DOS soluciones enteras.

....

Para aplicar la desigualdad de C-S:

Ejercicio 4. *(OME-FL)* Demuestra que

$$(ax + by)^2 \leq ax^2 + by^2$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a + b = 1, a, b \geq 0$ ¿En qué casos se da la igualdad?

....

Para trabajar con la ecuación de segundo grado, su discriminate y las parábolas:

Ejercicio 5. Determina el valor o valores de a para que se cumpla que

$$\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + 4x + 8} < 8 \quad \text{para todo número real} \quad x.$$

....

Para usar la desigualdad $H \leq A$ para tres números positivos, o el Ejercicio 2:

Ejercicio 6. *(OME-FL-2005)* Sean x, y, z números reales positivos

1) Si $x + y + z \geq 3$, ¿Se verifica necesariamente que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \leq 3$?

2) Si $x + y + z \leq 3$, ¿Se verifica necesariamente que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geq 3$?

. . . .

Para aplicar la desigualdad $G \leq A$:

Ejercicio 7.

- Demuestra que si $a, b, c \geq 0$, entonces $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.
- Demuestra que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números positivos tales que $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, entonces

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

. . . .

Ejercicio 8. Usando el Ejercicio 2:

1) Demuestra que si $a, b, c > 0$, entonces $(a + b + c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 9$.

2) Demuestra que si $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, entonces

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

(También hay que usar un poco de combinatoria)

También se pueden obtener con la desigualdad $H \leq A$ entre la media aritmética y la media armónica.

. . . .

Ejercicio 9.

- (Desigualdad de Nesbitt) Demuestra que si $a, b, c > 0$, entonces

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}.$$

Indicación: Utiliza que si $x, y, z > 0$, entonces $(x + y + z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \geq 9$.

- Demuestra que si a, b, y c son los lados de un triángulo, entonces

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \leq 2.$$

. . . .

Para trabajar, primero dibujando y luego haciendo operaciones con la desigualdad:

Ejercicio 10. Determina las soluciones de la inecuación $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}>\sqrt{x+1}$

. . . .

Ejercicio 11. Determina todos los posibles números reales x, y no nulos tales que

$$\frac{2x-y}{y}<0 \text{ y } \frac{2y-x}{x}<0.$$

. . . .

Ejercicio 12. Demuestra que si $a, b>0$, entonces

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}.$$

. . . .

Ejercicio 13. Sean x e y números reales tales que $x+y=2$ y $x^2+y^2 \leq 6$. Demuestra que

$$1-\sqrt{2} \leq x, y \leq 1+\sqrt{2}.$$

Interpreta geométricamente el resultado.

. . . .

Ejercicio 14. *(OME-FL-2012)* Sean a, b y c tres números reales positivos cuyo producto es 1. Demostrar que si la suma de estos números es mayor que la suma de sus recíprocos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.

. . . .